0-07 Lineare Gleichungen und Geraden

Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind in Blöcke aufgeteilt. Innerhalb eines Blockes (I bis IX) werden die Aufgaben mit zunehmender Aufgabennummer schwieriger. Sie sollten auch in der Lage sein, die schwierigen Aufgaben eines Blockes zu bearbeiten. Beginnen Sie in jedem Block zuerst mit der **herorgehobenen** Aufgabe. Nur wenn Sie diese nicht bearbeiten können, fangen Sie mit der ersten Aufgabe des betreffenden Blockes an. Auf der 4. Seite dieses Dokuments finden Sie die Lösungen zu den Aufgaben. Fachliche Hilfe zum Rechnen mit linearen Gleichungen finden Sie auf Seite 3.

I

[Lösen linearer Gleichungen] **Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf ($x \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$).**

01) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$	02) $\frac{1}{2}x + \frac{x-1}{4} = 0$	**03)** $\frac{1}{2}x + 1 + \frac{x-1}{4} = x$
04) $\frac{1}{2}(x+1) + \frac{x-1}{4} = x$	05) $3\ \frac{a}{2} - \frac{x}{2} = 2$	06) $3\frac{a}{2} - \frac{x}{2} = a\,x$
07) $\frac{a}{2}a + \frac{x-a}{a} = a$	08) $\frac{x}{2}a - \frac{x}{a} = a\,x$	09) $\frac{x}{2}a - \frac{x}{a} = \frac{(x^2-a^2)}{2x+2a}$

II

[Geradengleichungen] **Die folgenden Geraden $g_{1,\cdots,6}$ sind in der Punkt-Steigungs-Form $g(x) = m(x - x_P) + y_P$ wiedergegeben. Geben Sie die jeweiligen Gleichungen in der entsprechenden allgemeinen Form $g(x) = m\,x + t$ an ($x, a, b, c \in \mathbb{R}$):**

10) $g_1(x) = 2(x-1) + 4$	11) $g_2(x) = 2(x+1) - 2$	**12)** $g_3(x) = -2(x+1) - 3$
13) $g_4(x) = a(x+1) - 3$	14) $g_5(x) = -b(a+x) - c$	15) $g_6(x) = a(x-a) + a$

III

[Geradengleichungen] **Die folgenden Geraden $g_{1,\cdots,6}$ sind in der allgemeinen Form $g(x) = m\,x + t$ wiedergegeben. Geben Sie die entsprechenden Gleichungen in der Punkt-Steigungs-Form $g(x) = m(x - x_P) + y_P$ für die jeweils angegebene Stellen x_0 an ($x, x_P, y_P, a, b, c \in \mathbb{R}$):**

16) $g_1(x) = 2x + 3$, $x_P = 1$	17) $g_2(x) = 3 - 2x$, $x_P = -1$	**18)** $g_3(x) = m\,x + 3$, $x_P = \frac{1}{2}$
19) $g_4(x) = m\,x - a$, $x_P = -\frac{1}{2}$	20) $g_5(x) = m\,x - m$, $x_P = a$	21) $g_6(x) = b\,n\,x - b\,n$, $x_P = 2$

IV

[Berechnung von Geradengleichungen] **Die Punkte P und Q liegen auf einer Geraden g. Berechnen Sie die Geradengleichung von g und geben Sie das Ergebnis in der allgemeinen Form an ($x, a, b \in \mathbb{R}$):**

22) $P(2\vert 4)\ \ Q(4\vert 9)$	23) $P(2\vert -4)\ \ Q(-1\vert 9)$	24) $P(-1\vert 0)\ \ Q(0\vert 3)$
25) $P(0\vert a)\ \ Q(1\vert b)$	26) $P(-a\vert a)\ \ Q(-b\vert b)$	27) $P(0\vert a)\ \ Q(0{,}01\vert b)$

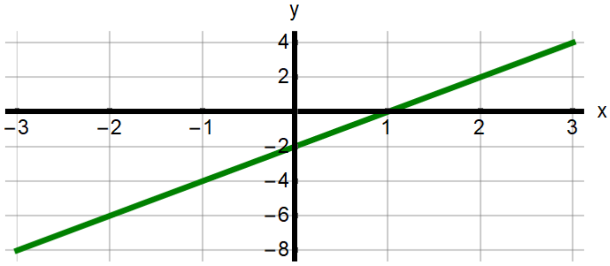
V

[Berechnung von Punkten auf einer Geraden] **Gegeben sind die folgenden Gleichungen der Funktionen f_i (i=1,2, $\cdots$,6) und die Stelle x_{P_i} der Punkte P_i. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte und geben Sie die Lösung in einer klammerfreien Darstellung an:**

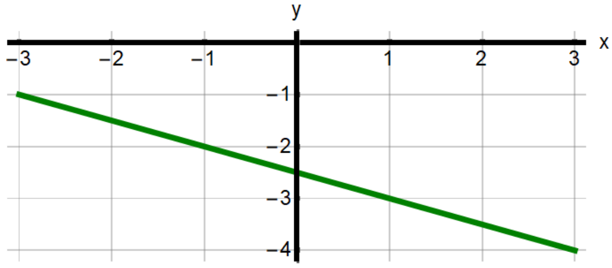
28) $f_1(x) = 3x - 1$, $x_{P_1} = 3$	**29)** $f_2(x) = a\,x - (a-2)$, $x_{P_2} = 2$	30) $f_3(x) = +a\,x - a\,b - c$, $x_{P_3} = 2$
31) $f_4(x) = a\,x - a^2 + a$, $x_{P_4} = 2$	32) $f_5(x) = a^2x - a^3 + a$, $x_{P_5} = a$	33) $f_6(x) = a^2x - 2a^3 + a^2$, $x_{P_6} = a^2$

VI [Bestimmung von Geradengleichungen aus x-y-Diagrammen] **Bestimmen Sie durch Auswertung der folgenden Diagramme die Funktionsgleichungen von h_1 und h_2:**

34) $h_1(x) = ?$



35) $h_2(x) = ?$



VII [Steckbriefaufgaben – 1] **In diesem Aufgabenblock werden die Verläufe der Geraden $g_{1,\cdots,4}$ beschrieben. Bestimmen Sie dazu die entsprechenden Gleichungen von k_i (*i=1, ⋯ ,4*) und zeichnen Sie die Graphen in ein *x-y*-Diagramm für $-2 \leq x <= 2$ ($x \in \mathbb{R}$):**

36) Die Gerade g_1 von k_1 verläuft durch die Punkte $P_1(-2|-6)$ und $Q_1(2|10)$.

37) Die Gerade g_2 von k_2 verläuft durch den Punkt $P_3(-\frac{3}{2}, 7)$ und verläuft bei $\mathbf{y = 1}$ **durch die Ordinate.**

38) Die Gerade g_3 von k_3 verläuft durch den Punkt $P_3(-\frac{3}{2}, \frac{17}{2})$ und besitzt bei $x = -\frac{2}{7}$ **eine Nullstelle.**

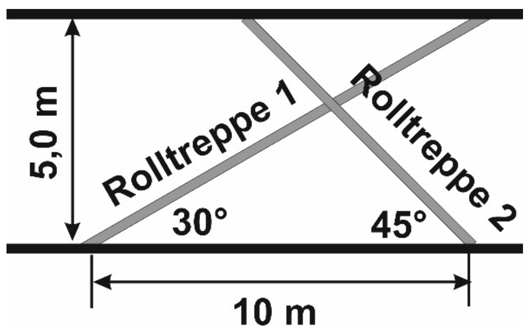
39) Die Gerade g_4 von k_4 besitzt eine Nullstelle bei $x = -\frac{5}{4}$ und eine Steigung von 8.

VIII [Schnittpunkte von Geraden] **Berechnen Sie die Schnittpunkte folgender Geraden mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$):**

40) $g_1(x) = x + 2$ $h_1(x) = -2x - 7$	**41)** $g_2(x) = 3(x-2) + 2$ $h_2(x) = -2x - (6 - x)$	**42)** $g_3(x) = a\,x - 5$ $h_3(x) = -a\,x + 3$
43) $g_4(x) = 5$ $h_4(x) = a\,x + 3$	**44)** $g_5(x) = a\,x - 3$ $h_5(x) = (a+1)x - 3 - x$	**45)** $g_6(x) = a^2 x - a$ $h_6(x) = a\,x - a^2$

IX [Text- und Sachaufgaben] **Bearbeiten Sie die folgenden Text- und Sachaufgaben:**

46) In einem Kaufhaus sind zwei Stockwerke durch Rolltreppen unterschiedlicher Neigungswinkel miteinander verbunden (siehe Skizze rechts). Der Abstand der unteren Enden beider Rolltreppen auf dem Boden beträgt 10 m. Berechnen Sie die Höhe über dem Boden, in der sich beide Rolltreppen treffen (notwendige Größen entnehmen Sie der Skizze rechts).



47) (**Diese Aufgabe ist nur von Schülern des technischen Zweiges zu bearbeiten)**

Auto 1 startet zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ortspunkt $x_{01} = 0$ und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit des Betrages $v_1 = 10\frac{m}{s}$. Zum gleichen Zeitpunkt startet Auto 2 am Ortspunkt $x_{02} = 100\,m$ und bewegt sich mit einem Geschwindigkeitsbetrag von $v_2 = 15\frac{m}{s}$ auf Auto 1 zu. Beide Fahrzeuge bewegen sich auf der gleichen geradlinigen Straße. Berechnen Sie den Zeitpunkt und den Ortspunkt des Treffens. Hinweis: $x(t) = x_0 + x_0\,t$.

Hinweise

Lineare Gleichungen

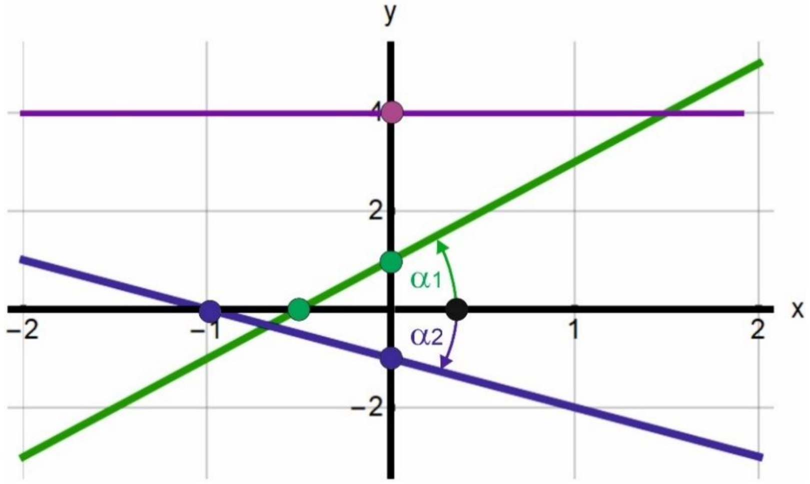
$f(x) = m \cdot x + t$	Hauptform	$x \in \mathbb{R}$	Unabhängige Variable
		$m \in \mathbb{R}$	Steigung der Geraden
		$t \in \mathbb{R}$	Ordinatenabschnitt der Geraden
$f(x) = m \cdot (x - x_P) + y_P$	Punkt-Steigungs-Form	$x \in \mathbb{R}$	Unabhängige Variable
		$m \in \mathbb{R}$	Steigung der Geraden
		$P(x_P \mid y_P)$:	Punkt auf der Geraden
$f(x) = m \cdot (x - x_0)$	Nullstellenform	$x \in \mathbb{R}$	Unabhängige Variable
		$m \in \mathbb{R}$	Steigung der Geraden
		x_0:	Nullstelle der Geraden

Lineare Gleichungen und Geraden

$f_1(x) = 2x + 1$

$f_2(x) = -x - 1$

$f_3(x) = 4$



Steigung von Geraden

$f(x) = m \cdot x + t \rightarrow$

m = Tan(α) $\rightarrow$

α = ArcTan(m)

$m_1 = 2 \rightarrow \alpha_1 = 63,44°$

$m_2 = -1 \rightarrow \alpha_2 = -45°$

Minus-Zeichen beachten

$m_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = 0°$

Achsenabschnitte von Geraden

Nullstellen x_0:

$f(x) = m\,x + t = 0 \rightarrow$

$x_0 = -\frac{t}{m}$

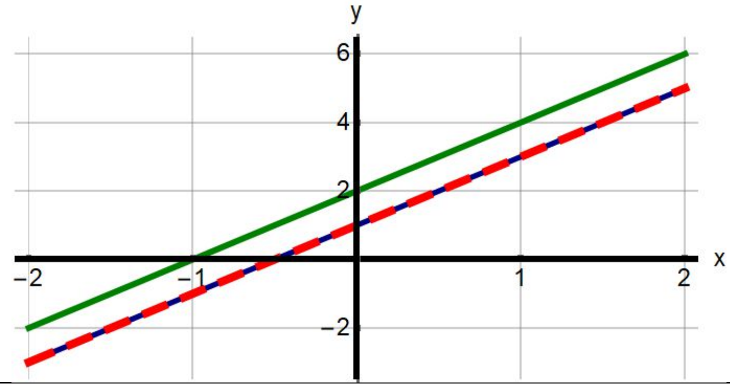
y-Koordinatenabschnitte (Ordinatenabschnitte) y_0: $y_0 = f(0) = t = 0$

Parallele Geraden

$f_1(x) = m_1\,x + t_1$

$f_2(x) = m_2\,x + t_1$ — $m_2 = m_1$, $t_2 \neq t_1$, $G_{f_2} \parallel G_{f_1}$

$f_3(x) = m_3\,x + t_3$ — $m_3 = m_1$, $t_3 = t_1$, $G_{f_3} = G_{f_1}$



Schnittpunkt von Geraden

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) = m_1\,x + t_1 \\ f_2(x) = m_2\,x + t_2 \end{array}\right\} \quad f_1(x) = f_2(x) \quad m_1\,x + t_1 = m_2\,x + t_2 \quad x = \frac{t_2 - t_1}{m_1 - m_2} \quad \begin{array}{l} t_1 \neq t_2 \\ m_1 \neq m_2 \end{array}$$

Geraden auswerten

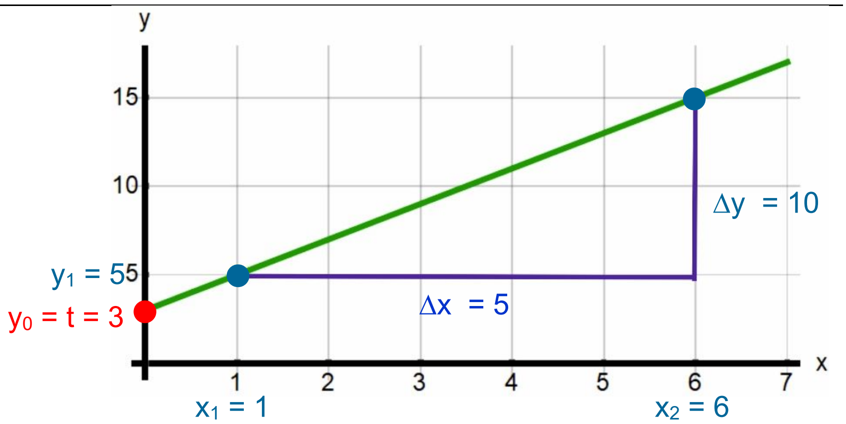
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{5} = 2$

$f(x) = m\,x + t$

$= 2x + 3$

$f(x) = m\,(x - x_P) + y_P$

$= 2(x - 1) + 5$



Lösungen

I	**01)** $x = -\frac{1}{2}$	**02)** $x = \frac{1}{3}$	**03)** $x = 3$	**04)** $x = 1$	**05)** $x = 3a - 4$
	06) $x = \frac{3a}{2a+1}$	**07)** $x = -\frac{1}{2}a(a^2 - 2a - 2)$	**08)** $x = 0$	**09)** $x = -\frac{a^2}{a^2-a-2}$	

II	**10)** $g_1(x) = 2x + 2$	**11)** $g_2(x) = 2x$	**12)** $g_3(x) = -2x - 5$
	13) $g_4(x) = a\,x + (a - 3)$	**14)** $g_5(x) = -b\,x - (a\,b + c)$	**15)** $g_6(x) = ax - a(a - 1)$
III	**16)** $g_1(x) = 2(x - 1) + 5$	**17)** $g_2(x) = -2(x + 1) + 5$	**18)** $g_3(x) = m(x - \frac{1}{2}) + (\frac{m}{2} + 3)$
	19) $g_4(x) = m(x + \frac{1}{2}) - (a + \frac{m}{2})$	**20)** $g_5(x) = m(x - a) + (a\,m - m)$	**21)** $g_6(x) = b\,n(x - 2) + b\,n$
IV	**22)** $g_1(x) = \frac{5x}{2} - 1$	**23)** $g_2(x) = -\frac{13x}{3} + \frac{14}{3}$	**24)** $g_3(x) = 3x + 3$
	25) $g_4(x) = x(b - a) + a$	**26)** $g_5(x) = -x$	**27)** $g_6(x) = 100\,x(b - a) + a$
V	**28)** $P_1 = (3\|8)$	**29)** $P_2 = (2\|2 + a)$	**30)** $P_3 = (2\|2a - a\,b - c)$
	31) $P_4 = (2\|3a - a^2)$	**32)** $P_5 = (a\|a)$	**33)** $P_6 = (a^2\|a^2 - 2a^3 + a^4)$

VI	**34)** $h_1(x) = 2x - 2$	**35)** $h_2(x) = -0.5x - 2.5$

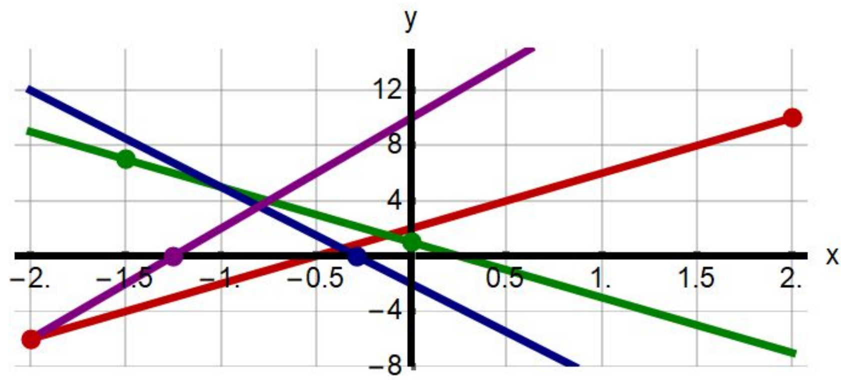
VII

36) $k_1(x) = 4x + 2$

37) $k_2(x) = -4x + 1$

38) $k_3(x) = -7x - 2$

39) $k_4(x) = 8x + 10$



VIII

40) $P_1 = (-3|-1)$

41) $P_2 = (-\frac{1}{2}|-\frac{11}{2})$

42) $P_3 = \left(\frac{4}{a}\middle|-1\right)$

43) $P_4 = (\frac{2}{a}|5)$

44) $P_5 = (x|-3 + ax)$

(**unendliche viele** Lösungen)

45) $P_6 = (-1|-a - a^2)$ für a≠1

$P_6 = (x|-1 + x)$ für a=1

(**unendliche viele** Lösungen für a=1)

IX

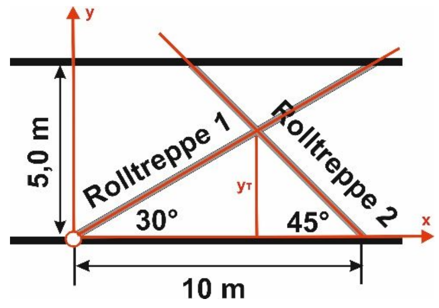
46) **Ansatz**: $y_1(x) = \mathrm{Tan}(30°) \cdot x$

$y_2(x) = -\mathrm{Tan}(45°) \cdot (x - 10\,m)$

$y_1(x) = y_2(x)$ →

Ergebnis: $x_T = 6{,}34\,m$ x-Koordinaten des Treffpunktes →

$\boldsymbol{y_T = 3{,}66\,m}$ y-Koordinaten des Treffpunktes = Höhe des Treffpunktes



Anmerkung: Machen Sie sich eine Skizze mit beiden Geraden. Solche Skizzen helfen Ihnen, den richtigen Ansatz für die Aufgabe zu finden.

47) **Ansatz**: $x_{01}(t) = x_{01} = x_{01} + v_{01}\,t$ und

$x_{02}(t) = x_{02} + v_{02}\,t$

$x_{01}(t) = x_{02}(t)$ →

$x_{01} + v_{01}\,t = x_{02} + v_{02}\,t$ →

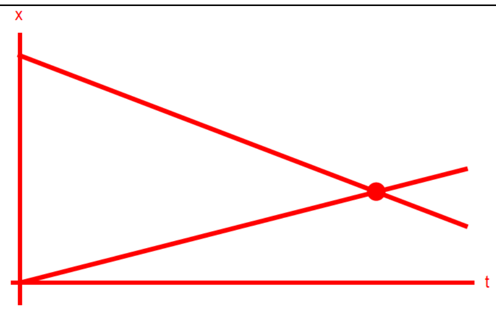
$t = t_T = \frac{x_{02} - x_{01}}{v_1 - v_2} = \frac{100\,m - 0\,\mathrm{m}}{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - (-15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})} = \frac{100\,m}{25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$

Ergebnis: $\boldsymbol{t_T = 4{,}0\,s}$ **Zeit**punkt des Treffens

$x_T = x_{01} + t_T\,v_{01} = 0\,m + 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4{,}0\,s$

$\boldsymbol{x_T = 40\,m}$ **Orts**punkt des Treffens

Anmerkung: Berücksichtigen Sie bei den Berechnungen immer die physikalischen Einheiten.



Anmerkung: Machen Sie sich eine Skizze mit beiden Ortskurven. Solche Skizzen helfen Ihnen, den richtigen mathematischen Ansatz für die Aufgabe zu finden.